# POLINOMIOS

Alguna vez en la escuela media, en clases de Física, hemos visto expresiones tales como $s_t = v\ t + s_0$ que representa la relación posición (s) de un móvil, que se desplaza en movimiento rectilíneo uniforme, en función del tiempo (t). O del movimiento uniformemente variado, donde la expresión utilizada es $s_t = s_0 + v_0\ t + 1/2\ a\ t^2$.

En Economía, suele utilizarse expresiones como $C = 600x^2 + 320x + 150$ que representa, por ejemplo, el costo total de construir un depósito de materiales.

Es necesario, entonces estudiar las expresiones de la forma:

$$P(x) = a_0 + a_1\ x + a_2\ x^2 + ... + a_n\ x^n \qquad \leftarrow$$

que llamaremos polinomios, donde los $a_0$, $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ se llaman **coeficientes** y son números reales o complejos (nosotros sólo trabajaremos con reales); **x** es la **variable** o **indeterminada** y los exponentes de la variable x son todos enteros no negativos.

<u>Actividad nº1</u>

Indique cuáles de estas expresiones son polinomios reales (con coeficientes reales)

a) $\frac{1}{5}x^2$ b) $3x^2 - \sqrt{5}x^3 + 4$ c) $5x^{-1} + x^4$

d) 3 sen (2x) e) $4\pi x^4 + 2\pi x^2 + \pi$ f) $7-\frac{1}{x}$

g) $-10$ h) $2^x - 3^x + 4^x$ i) $3\sqrt{x} - 4x + x^4$

Al conjunto de todos los polinomios en la variable **x** con coeficientes reales lo simbolizaremos $\mathbf{\Re[x]}$.

Ya dijimos que en ← , los $a_0$, $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ son los coeficientes. El coeficiente $a_0$ es el **término independiente**. El coeficiente $a_n$ es el **coeficiente principal**, si $a_n \neq 0$.

Si si $a_n \neq 0$, diremos que **n** es el **grado** de P(x).

Por ejemplo, en $P(x) = 5x^3 - 2x + 4$ el grado es 3; $Q(x) = 4 - x$ es de grado 1;

$V(x) = 3x^2 - \sqrt{6}x^7 + 4x$ es de grado 7 y $S(x) = 23$ es de grado 0.

El polinomio **nulo** es aquél donde todos los coeficientes son 0. El polinomio nulo no tiene grado.

Según el número de términos con coeficientes no nulos, el polinomio se llama monomio, binomio, trinomio, ... En el ejemplo precedente, S(x) es un monomio, Q(x) es binomio, P(x) y V(x) son trinomios.

<u>Actividad nº2</u>

Ejemplifique: a) binomio de tercer grado

b) monomio de quinto grado

c) trinomio de cuarto grado

d) monomio de grado cero

Definición:

*Dados dos polinomios P y Q decimos que son iguales si y sólo si los coeficientes de los términos de igual grado son iguales.*

Por ejemplo $3 - x^3 + 7x^4 - 4x^5 = 3 + 0x + 0x^2 - x^3 + 7x^4 - 4x^5$ . Al polinomio del segundo miembro se lo llama **completo**, porque siendo de grado 5, se escriben todos los términos de grado igual o menor que 5 colocando coeficiente 0 en los términos que faltan.

Actividad Nº3

Determinar los valores de m, n, r y s para que T(x) = G(x)

a) $T(x) = 3 - 5x + 2x^2 - \frac{1}{2}x^5$ $\quad G(x) = m + (-2n - m)x + \frac{4}{3}(s + r)x^2 + rx^3 + (n - s)x^5$

b) $T(x) = -3\sqrt{2}\,x + 7\sqrt{2}\,x^2 - 4\sqrt{2}\,x^3 + 8x^4$ $\quad G(x) = -3mx + (n + r)x^2 + (m - r + s)x^3 + n^2 x^4$

## Operaciones con Polinomios

Veremos las operaciones con polinomios y las propiedades que éstas verifican.

### Adición

La suma del polinomio $M(x) = m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + ... + m_{n-1} x^{n-1} + m_n x^n$ y el polinomio $B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_{n-1} x^{n-1} + b_n x^n + ... + b_m x^m$ donde $n \le m$, es el polinomio:

$M(x) + B(x) = (m_0 + b_0) + (m_1 + b_1) x + (m_2 + b_2) x^2 + ... + (m_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1} + (m_n + b_n) x^n + ...$
$... + b_m x^m$

Ejemplo:

$M(x) = 3 - 5x + 2x^2 - \frac{1}{2}x^5$ $\qquad B(x) = 3 - x + 7x^4 - 4x^5$

$M(x) + B(x) = (3 + 3) + (-5 - 1)x + (2 + 0)x^2 + (0 + 7)x^4 + (-1/2 - 4)x^5$

$M(x) + B(x) = 6 - 6x + 2x^2 + 7x^4 - 9/2\, x^5$

En la práctica puede adoptarse esta disposición en la que se encolumnan los términos de igual grado (llamados **términos semejantes**)

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & 3 & -5x & +2x^2 & & -\frac{1}{2}x^5 \\
+ & & & & & \\
 & 3 & -\ x & & +7x^4 & -4x^5 \\
\hline
 & 6 & -6x & +2x^2 & +7x^4 & -\frac{9}{2}x^5
\end{array}
$$

Para poder enunciar alguna conclusión sobre el grado del polinomio suma sugerimos que, siendo $A(x) = 1 - 2x + x^3 - 2x^4$ $\quad B(x) = 2x^2 - x + 2$ $\quad C(x) = 2x^4 + 3x^3 + x^2$
$D(x) = 2x^4 - x^3 + 2x + 3$, resuelvan:

A(x) + B(x) = ......................................................................gr (A+B) = .....................

A(x) + C(x) = ......................................................................gr (A+C) = .....................

A(x) + D(x) = ......................................................................gr (A+D) = .....................

En estos ejemplos podemos observar que:

| |
|---|
| *El grado del polinomio suma A + B es menor o igual que el grado del polinomio de mayor grado que estamos sumando.* |

La suma de polinomios goza de las mismas propiedades que la suma de números.

Actividad Nº4

Dados los polinomios $A(x) = 1 - 2x + x^3 - 2x^4$ $\quad B(x) = 2x^2 - x + 2$ $\quad F(x) = 1/2\,x + x^2 - 3$

I) Verificar que a) la suma de polinomios es conmutativa; b) la suma de polinomios es asociativa.

II) ¿Existe elemento neutro para la suma de polinomios? ¿Cuál es?

III) ¿Tiene todo polinomio un opuesto, o inverso aditivo? Recuerde que para todo polinomio A(x) existe otro K(x) tal que A(x) + K(x) da por resultado el polinomio nulo. Se dice que K(x) es el opuesto de A(x) y se lo representa como –A(x). Halle, entonces, los opuestos de A(x), B(x) y F(x).

## Sustracción

Dados los polinomios P(x) y S(x), efectuar la sustracción (resta o diferencia) entre P y S equivale a sumar a P el opuesto de S.

Por ejemplo: Si $P(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 2$ y $S(x) = 3x^4 - 5x^2 - 3$ , entonces $-S(x) = -3x^4 + 5x^2 + 3$

por lo tanto: $P(x) - S(x) = P(x) + (-S(x)) = (x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 2) + (-3x^4 + 5x^2 + 3)$

$$P(x) - S(x) = x^5 - x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 1$$

Actividad Nº5

1) Dados $F(x) = 2x^4 - 8x + x^3$, $G(x) = 2x^3 - x^4$, $H(x) = -2x + x^3 - 2x^4 + 1$, se pide hallar:

a) F(x) + G(x) – H(x)

b) F(x) – G(x) – H(x)

c) F(x) – (G(x) – H(x))

2) Siendo T(x) = $-3\sqrt{2}\,x+7\sqrt{2}\,x^2-4\sqrt{2}\,x^3+8x^4$ y J(x) = $\sqrt{2}\,x-4+4\sqrt{2}\,x^3-\sqrt{2}\,x^2$ resuelva:

a) T(x) + J(x)

b) T(x) – J(x)

c) J(x) – T(x)

3) Halle V(x) tal que W(x) – V(x) = Y(x) , si W(x) = $\frac{1}{3}-2x+4x^3$ y Y(x) = $-\frac{2}{3}x^3+4x-x^2-1$.

## Producto

Al multiplicar dos monomios, el resultado es otro monomio.

Por ejemplo: si A(x) = $6x^3$ y B(x) = $4x^5$, entonces A(x) . B(x) = $6x^3 . 4x^5 = 6 . 4 . x^3.x^5 = 24\,x^8$

Si A(x) = $6x^3$ y L(x) = $-3x^4$, entonces A(x) . L(x) = $6 . (-3) . x^3 . x^4 = -18\,x^7$

El coeficiente del producto es el producto de los coeficientes de los factores. El grado del monomio producto es la suma de los grados de los factores, si estos no son nulos. Si alguno de los factores es el polinomio nulo, el producto es el polinomio nulo.

Para calcular el producto de dos polinomios, multiplicamos cada término (monomio)de uno de ellos por cada uno de los términos (monomio) del otro.

Por ejemplo, si A(x) = $2x^3-x+1$ y B(x) = $3x^2-x+4$, entonces resulta

A(x) . B(x) = $(2x^3-x+1) . (3x^2-x+4)$ =

$$= 2x^3(3x^2-x+4)-x\,(3x^2-x+4)+1(3x^2-x+4) =$$

$$= 6x^5-2x^4+8x^3-3x^3+x^2-4x+3x^2-x+4 =$$

$$= 6x^5-2x^4+5x^3+4x^2-5x+4$$

Si queremos utilizar la disposición práctica:

$$\begin{array}{lrrrrrrl}
 & & & 2x^3 & & -x & +1 & \\
 & & & & 3x^2 & -x & +4 & \\
\hline
 & 6x^5 & -2x^4 & +8x^3 & & & & 2x^3 . B(x) \\
+ & & & -3x^3 & +x^2 & -4x & & -x . B(x) \\
 & & & & +3x^2 & -x & +4 & 1 . B(x) \\
\hline
 & 6x^5 & -2x^4 & +5x^3 & +4x^2 & -5x & +4 &
\end{array}$$

Para deducir el grado del polinomio producto resolvemos los siguientes ejemplos. Consideramos: M(x) = x + 3, G(x) = $x^2+2x-1$, B(x) = $2x^3-x+2$ y calculamos:

M(x) . G(x) = ..........................................................................................gr M(x) . G(x) :...................

M(x) . B(x) = ..........................................................................................gr M(x) . B(x) :..................

G(x) . B(x) =............................................................................................gr G(x) . B(x) :..................

En estos ejemplos observamos que:

*El grado del polinomio producto es igual a la suma de los grados de los polinomios factores.*

También podemos sacar conclusiones sobre el coeficiente principal del polinomio producto, que es el producto de los coeficientes principales de los polinomios factores.

¿Y el término independiente del polinomio producto? Es igual al producto de los términos independientes de los polinomios factores.

La multiplicación de polinomios verifica la ley de cierre (el producto de dos polinomios es otro polinomio).

Actividad Nº6

1) Dados los polinomios $T(x) = 2 - x + 1/2x^2$ , $V(x) = x - 2$, $W(x) = x + 1 + x^2$,

a) verifica que: i) la multiplicación de polinomios es asociativa

ii) la multiplicación de polinomios es conmutativa

iii) el elemento neutro de la multiplicación es $E(x) = 1$

b) comprueba que $T(x) . (V(x) + W(x)) = T(x)\, V(x) + T(x)\, W(x)$

c) calcula $V^2$, $W^2$, $V^3$.

2) Con los polinomios $A(x) = -2x^4 - 5 + 7x^2 + 3x^3$, $B(x) = 3x + 1$, $C(x) = 2x^5 - 3x^3$ hallen los resultados de: a) $C(x) - A(x) . B(x)$; b) $3A(x) + 2x^3 B(x)$ ; c) $[B(x)]^2 - 2A(x)$

## División

Si deseamos determinar los números enteros c y r que satisfacen la ecuación 9 = 4 c + r , podemos efectuar la división entera mediante el correspondiente algoritmo:

$$\begin{array}{r|l} 9 & 4 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$$

donde 9 es el dividendo, 4 el divisor, 2 es el cociente y 1 es el resto. Entonces, c = 2 y r = 1 son los únicos números enteros que verifican la igualdad 9 = 4 . **2** + **1**. Además recordamos que el divisor nunca es cero y que el resto siempre es menor que el divisor. Esto que sucede en el conjunto de los números enteros es muy similar a loa que ocurre con los polinomios.

Para hallar los polinomios C(x) y R(x) que satisfacen la ecuación $\left(3x^4 + 2x^3 - 4x - 4\right) = (x^3 - 2x^2).C(x) + R(x)$ podemos realizar la división entera de polinomios. El polinomio C(x) se llama polinomio cociente y el R(x) se llama polinomio resto. El divisor no puede ser el polinomio nulo y el grado del resto debe ser menor que el grado del divisor.

En el algoritmo de la división, para determinar los polinomios C y R:

1º: Se ordenan según las potencias decrecientes de la indeterminada (x), el dividendo y el divisor; completando además e dividendo.

2º: Dividimos el primer término del dividendo por el primer término del divisor, obteniéndose así el primer término del cociente.

3º: Multiplicamos el primer término del cociente por todo el divisor.

4º: Se resta este producto del dividendo, obteniéndose un nuevo dividendo.

5º: Reiteramos el procedimiento 2º, 3º y 4º hasta obtener el polinomio resto, de grado menor que el divisor.

Ejemplificamos con los polinomios $\left(3x^4 + 2x^3 - 4x - 4\right) : (x^3 - 2x^2)$

1º: Ambos polinomios están ordenados pero hay que completar el dividendo: $3x^4 + 2x^3 + 0x^2 - 4x - 4$

2º:
$$\begin{array}{l|l} 3x^4 + 2x^3 + 0x^2 - 4x - 4 & x^3 - 2x^2 \\ \cline{2-2} & 3x \end{array}$$

3º:
$$\begin{array}{l|l} \phantom{-}3x^4 + 2x^3 + 0x^2 - 4x - 4 & x^3 - 2x^2 \\ \cline{2-2} -\;3x^4 - 6x^3 & 3x \end{array}$$

4º:
$$\begin{array}{l|l} \phantom{-}3x^4 + 2x^3 + 0x^2 - 4x - 4 & x^3 - 2x^2 \\ \cline{2-2} -\;3x^4 - 6x^3 & 3x \\ \cline{1-1} \qquad\quad 8x^3 + 0x^2 & \end{array}$$

5º:
$$\begin{array}{l|l} \phantom{-}3x^4 + 2x^3 + 0x^2 - 4x - 4 & x^3 - 2x^2 \\ \cline{2-2} -\;3x^4 - 6x^3 & 3x + 8 \\ \cline{1-1} \qquad\quad 8x^3 + 0x^2 & \end{array}$$

6º:
$$\begin{array}{l|l} \phantom{-}3x^4 + 2x^3 + 0x^2 - 4x - 4 & x^3 - 2x^2 \\ \cline{2-2} -\;3x^4 - 6x^3 & 3x + 8 \\ \cline{1-1} \qquad\quad 8x^3 + 0x^2 & \\ \qquad -\;8x^3 - 16x^2 & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad\quad 16x^2 - 4x - 4 & \end{array}$$

Y como el grado de $(16x^2 - 4x - 4)$ es 2 y el grado del divisor es 3, entonces quedan determinados el polinomio cociente $C(x) = 3x + 8$ y el polinomio resto $R(x) = 16x^2 - 4x - 4$ que verifican:

$$3x^4 + 2x^3 - 4x - 4 = (x^3 - 2x^2)\,(3x + 8) + (16x^2 - 4x - 4)$$

Planteamos otro ejemplo. Queremos efectuar A : B siendo A(x) = $2x^3 - x + 1$ y B(x) = $x^2 - x + 1$.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 2x^3 + 0x^2 - x + 1 & x^2 - x + 1 \\
\cline{3-3}
- & 2x^3 - 2x^2 + 2x & 2x + 2 \\
\cline{2-2}
 & 2x^2 - 3x + 1 & \\
- & 2x^2 - 2x + 2 & \\
\cline{2-2}
 & -x - 1 &
\end{array}
$$

$$2x^3 - x + 1 = (x^2 - x + 1)(2x + 2) + (-x - 1)$$

Actividad Nº7

1) Dados A y B determinar C y R tal que A = B . C + R, donde R(x) = 0(x) o gr (R) < gr (B)

a) $A(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ $\qquad$ $B(x) = x - 1$

b) $A(x) = 3x^4 - 2x^2 - 1$ $\qquad$ $B(x) = 2x + 2$

c) $A(x) = x^3 - x^2 + x + 1$ $\qquad$ $B(x) = x^2 + 1$

d) $A(x) = 2x^2 + x - 3$ $\qquad$ $B(x) = 3x^2$

e) $A(x) = 2x^2 + x - 3$ $\qquad$ $B(x) = 2x^3$

f) $A(x) = -4x^4$ $\qquad$ $B(x) = x^2 + x + 2$

2) a) Hallar el polinomio A(x) (dividendo), sabiendo que el divisor B(x) = 3x – 1, el cociente $C(x) = -x^2 - \frac{1}{2}x + 1$ y el resto R(x) = –5.

b) Hallar el polinomio divisor B(x) siendo el dividendo A(x) = $x^3 + 3x^2 - 4x - 10$, el cociente C(x) =x + 2 y el resto R(x) = 2.

Cuando tenemos que dividir un polinomio P(x) por un polinomio mónico (coeficiente principal igual a 1) de grado uno, conviene utilizar un algoritmo llamado Regla de Ruffini. Este es un procedimiento que permite hallar el cociente y el resto sin efectuar la secuencia que describimos anteriormente. Recordemos que **únicamente** puede usarse la regla de Ruffini si el divisor es un polinomio de la forma $x \pm a$

Ejemplificaremos dicho procedimiento efectuando la división entre A(x) = $3x^3 + 7x^2 + 6x - 1$ y B(x) = x + 2

La disposición práctica requiere que en el primer renglón se escriben los coeficientes del dividendo ordenado y completo hasta el término independiente inclusive. En el ángulo se escribe el opuesto de a que figura en el divisor (su raíz ).

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 3 & 7 & 6 & -1 \\
-2 & & -6 & & \\
\hline
 & 3 & 1 & &
\end{array}
$$

El coeficiente principal del dividendo (3) se copia abajo. Se lo multiplica por –2 y el resultado (–6) se escribe debajo del siguiente coeficiente del dividendo (7). Se suma 7 y –6 y el resultado (1) se escribe abajo.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 3 & 7 & 6 & -1 \\
-2 & & -6 & -2 & \\
\hline
 & 3 & 1 & 4 &
\end{array}
$$

El 1 obtenido en el paso anterior reinicia el ciclo: se lo multiplica por –2 y el resultado (–2) se escribe debajo del siguiente coeficiente del dividendo (6). Se suman –2 y 6 y el resultado (4) se escribe abajo.

| | 3 | 7 | 6 | $-1$ |
|---|---|---|---|---|
| $-2$ | | $-6$ | $-2$ | $-8$ |
| | 3 | 1 | 4 | $\boxed{-9}$ |

El 4 obtenido en el paso anterior reinicia el ciclo: se lo multiplica por $-2$ y el resultado ($-8$) se escribe debajo del último coeficiente del dividendo ($-1$). Se suman $-1$ y $-8$, y el resultado ($-9$) es el resto. Se escribe abajo.

El resto es $-9$, siempre es una constante. Los valores 3, 1 y 4 son los coeficientes del polinomio cociente ordenado y completo, cuyo grado es una unidad menor que el grado del dividendo. Entonces C(x) = $\mathbf{3}x^2 + \mathbf{1}x + \mathbf{4}$.

Según el algoritmo de la división podemos escribir:

$3x^3 + 7x^2 + 6x - 1 = (x + 2)(3x^2 + 1x + 4) - 9.$

<u>Actividad Nº8</u>

1) En la Actividad Nº7, inciso 1) identifique en cuáles divisiones puede aplicar la regla de Ruffini y aplíquela, verificando sus resultados anteriores.

2) Obtener mediante la regla de Ruffini el cociente y el resto de la división entre A(x) y B(x).

a) $A(x) = 6x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ $\quad$ $B(x) = x + 2$

b) $A(x) = 8x - 12x^2 - 34 + 3x^3$ $\quad$ $B(x) = x - 4$

c) $A(x) = -2x^4 + x^2 + 4$ $\quad$ $B(x) = x + 3$

d) $A(x) = ax^3 + a^4$ $\quad$ $B(x) = x - 1/2$

e) $A(x) = (x + a - 1)^2 - a^2 + 2a$ $\quad$ $B(x) = x - a$

3) Para resolver las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini, recuerde que si se multiplican (dividen) el dividendo y el divisor por un número distinto de cero, el cociente no varía pero el resto queda multiplicado (dividido) por dicho número.

a) $A(x) = x^3 - 2x + 1$ $\quad$ $B(x) = -x + 2$

b) $A(x) = 6x^3 - 2x^2 + 8x - 4$ $\quad$ $B(x) = 2x - 1$

c) $A(x) = 3x^2 - 6x + 8$ $\quad$ $B(x) = 3x - 6$

## <u>Divisibilidad de Polinomios</u>

Si al realizar la división entera entre A(x) y B(x) el resto es **nulo**, decimos que A(x) es divisible por B(x), o que B(x) divide a A(x).

B(x) divide a A(x) si y sólo si existe un polinomio K(x) tal que K(x) . B(x) = A(x).

Para averiguar si A(x) es divisible por B(x), efectuamos la división entre A y B y comprobamos si el resto es o no es 0 (polinomio nulo).

Por ejemplo, si queremos ver si $A(x) = x^2 - 5x + 6$ es divisible por $B(x) = x - 2$, podemos dividir aplicando la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -5 & 6 \\ 2 & & 2 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

Como R(x) = 0, entonces A(x) es divisible por B(x).

Para analizar si $A(x) = x^5 - x^3 + x^2 - 2x + 1$ es divisible por $B(x) = x^2 + 1$, usamos el algoritmo conocido ya que no puede aplicarse la regla de Ruffini.

$$\begin{array}{rrrrrr|l} x^5 & +0x^4 & -x^3 & +x^2 & -2x & +1 & x^2+1 \\ \cline{7-7} + \; -x^5 & & -x^3 & & & & x^3-2x+1 \\ \cline{1-3} & & -2x^3 & +x^2 & -2x & & \\ & + & 2x^3 & & 2x & & \\ \cline{3-5} & & & x^2 & & +1 & \\ & & + & -x^2 & & -1 & \\ \cline{4-6} & & & & & 0 & \end{array}$$

Entonces, A(x) es divisible por B(x).

Observemos que en el algoritmo, en lugar de restar el polinomio obtenido en cada paso, se sumó su opuesto.

<u>Actividad Nº9</u>

Averiguar si A(x) es divisible por B(x).

a) $A(x) = 2x^7 + 3x^6 + 18x^3 + 29x + 10$ $\qquad B(x) = 2x^2 + 3x$

b) $A(x) = 2x^5 + 16x^3 - x^6$ $\qquad B(x) = x^2 + 2x$

c) $A(x) = 6x^6 - 9x^4 + 10x^2 - 15$ $\qquad B(x) = 2x^2 - 3$

Hay, además de los vistos, otros modos de averiguar la divisibilidad de un polinomio por otro de la forma x – a (siendo a un número real cualquiera).

Para ello debemos definir el valor numérico de un polinomio:

> *Dado un polinomio P(x) llamamos **valor numérico** de P(x) para $x = a \in R$, al número que se obtiene reemplazando a **x** por **a** y efectuando los cálculos.*

Por ejemplo, en $P(x) = x^2 - 5x + 6$, $P(1) = 1^2 - 5 . 1 + 6 = 2$

$P(2) = 2^2 - 5 . 2 + 6 = 0$

$P(-1) = (-1)^2 - 5 . (-1) + 6 = 12$

En $P(x) = x^4 - 8$, $P(-2) = (-2)^4 - 8 = 8$

$P(0) = 0^2 - 8 = -8$

En $P(x) = \sqrt{5}$, $P(3) = \sqrt{5}$

$P(-2) = \sqrt{5}$

$P(\sqrt{5}) = \sqrt{5}$

Actividad Nº10

En los polinomios $A(x) = -2x^2 - 1/2x + 3$, $H(x) = x^3 - x^2 + 1$, $T(x) = -x^2 - 4$, calcular:

a) $-A(-1)$, b) $-H(-2)$, c) $T(\sqrt{2})$, d) $-H(0)$, e) $T(-3)$

| *Decimos que $x = a$ es raíz de un polinomio $P(x) \Leftrightarrow P(a) = 0$.* |
|---|

Por ejemplo, $x = 1$ es raíz de $P(x) = = x^5 - x^3$ porque $P(1) = 1^5 - 1^3 = 0$. También $x = -1$ es raíz de P, porque $P(-1) = (-1)^5 - (-1)^3 = -1 + 1 = 0$.

Si realizamos la división entera de un polinomio P(x) por (x − a) donde a es un número real y R es también una constante:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x - a \\ \cline{2-2} R & C(x) \end{array} \quad \Rightarrow \quad P(x) = (x - a)\, C(x) + R \qquad ①$$

Si x = a, reemplazamos en ① y resulta: $P(a) = \underbrace{(a - a)}_{0} C(a) + R \quad \Rightarrow \quad P(a) = R$

Enunciamos, entonces, el **<u>Teorema del Resto</u>**

| *El resto de la división de un polinomio P(x) por otro de la forma x − a, es igual a P(a).* |
|---|

Cuando queramos investigar si un polinomio P(x) es divisible por otro de la forma x − a, bastará hallar P(a). Si P(a) = 0, entonces P(x) es divisible por x − a.

Averigüemos si $A(x) = x^2 - 5x + 6$ es divisible por $B(x) = x - 2$, utilizando el teorema del resto:

$A(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad$ A es divisible por B.

Actividad Nº11

1) Analiza si A es divisible por B, aplicando teorema del resto.

a) $A(x) = x^3 - 8$ $\qquad B(x) = x + 2$

b) $A(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ $\qquad B(x) = x - 2$

c) $A(x) = x^2 + 5x + 6$ $\qquad B(x) = x - 3$

2) Halla k para que B(x) sea divisor de A(x)

a) $A(x) = x^3 + kx^2 + kx + 4$ $\qquad$ $B(x) = x - 1$

b) $A(x) = kx^4 - x^3 + kx^2 - x + k$ $\qquad$ $B(x) = x - 1/2$

# Factorización de Polinomios

Recordemos que un valor x = a es raíz del polinomio P(x), si el polinomio se anula para ese valor, o sea si P(a) = 0. Además, si P(x) está expresado como producto de otros polinomios, las raíces de éstos son las raíces de P(x).

Por ejemplo, $P(x) = (x-1)(x-2)(x+4)$ tiene como raíces a x = 1, x = 2 y x = –4.

Si al escribir un polinomio como producto hay más de un factor que tiene la misma raíz, a ésta se la llama *raíz múltiple*. En Q(x) = (x – 2) (x – 2) (x + 5), x = 2 es una raíz doble de Q(x). Si M(x) = (x + 3) (x + 3) (x + 3), x = –3 es raíz triple de M(x).

Un polinomio puede tener raíces reales y raíces no reales. El polinomio $S(x) = (x + 6)(x^2 + 4)$, tiene sólo una raíz real, x = –6.

Según el Teorema Fundamental del Álgebra, *un polinomio de grado n tiene exactamente n raíces,* considerando las reales y las no reales.

Como consecuencia de este teorema, *un polinomio de grado n tiene como máximo n raíces reales.* Y como las raíces no reales de un polinomio vienen siempre de a pares, un polinomio de grado impar tiene como mínimo una raíz real.

Queremos ahora descomponer un polinomio en factores. Vamos a recordar algunas técnicas.

## Factor Común

Si en un polinomio, la variable x figura en todos los términos, es conveniente sacar factor común. También puede extraerse un número que es factor en todos los coeficientes.

Ejemplos: $P(x) = 3x^2 - 18x = 3x(x-6)$

$F(x) = 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 = 2x^2(x^2 - 3x + 2)$

$G(x) = x^3 + x^2 = x^2(x+1)$

$H(x) = 10x^3 - 25 = 5(2x^3 - 5)$

Siempre podemos controlar que el producto que obtuvimos es correcto aplicando la propiedad distributiva.

## Diferencia de Cuadrados

Recordamos que una diferencia de cuadrados puede escribirse como producto **$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$.**

Cuando se nos presenta la **resta** de dos términos y cada uno de ellos es una potencia cuadrada, puede expresarse como el producto entre la suma y la diferencia de las bases de esas potencias.

Ejemplos: $J(x) = x^2 - 25 = (x+5)(x-5)$

$K(x) = x^4 - 36 = (x^2 + 6)(x^2 - 6)$

$$L(x) = 16x^4 - 81 = (4x^2 + 9)(4x^2 - 9) = (4x^2 + 9)(2x + 3)(2x - 3)$$

Muchas veces podemos combinar las diferentes técnicas para factorizar polinomios:

$D(x) = x^4 - 9x^2 = x^2(x^2 - 9) = x^2(x + 3)(x - 3)$

Actividad Nº12

Expresen cada E(x) como productos de polinomios del menor grado posible:

a) $E(x) = -x^3 + 2x^2$

b) $E(x) = x^6 - x^2$

c) $E(x) = 3x^3 - 12x$

## Factor común por grupos

Algunos polinomios presentan una estructura que nos permite formar grupos de igual cantidad de términos y sacar factor común en cada uno de esos grupos. Una vez hecho esto, aparece un nuevo factor común. Veamos en un ejemplo:

$V(x) = 7x^5 - 5x^4 + 14x - 10 = (7x^5 - 5x^4) + (14x - 10) = x^4(7x - 5) + 2(7x - 5)$

En los dos términos que quedan, 7x – 5 es factor común. Entonces el polinomio queda factorizado:

$V(x) = (7x - 5)(x^4 + 2)$

Otro ejemplo:

$$W(x) = 3x^8 + x^7 - 2x^5 + 3x^3 + x^2 - 2 = (3x^8 + x^7 - 2x^5) + (3x^3 + x^2 - 2) =$$
$$= x^5(3x^3 + x^2 - 2) + (3x^3 + x^2 - 2) = (3x^3 + x^2 - 2)(x^5 + 1)$$

Otro más:

$$Y(x) = x^6 - x^4 - x^2 + 1 = (x^6 - x^4) + (-x^2 + 1) = x^4(x^2 - 1) - 1(x^2 - 1) = (x^2 - 1)(x^4 - 1)$$

Pero aún podemos descomponer ambas diferencias de cuadrados:

$$Y(x) = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1) = (x + 1)^2(x - 1)^2(x^2 + 1)$$

*Es importante recordar que la potenciación **NO** es distributiva respecto de la suma ni de la resta.*

$\mathbf{(x + 1)^2 \neq x^2 + 1}$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{(x - 1)^2 \neq x^2 - 1}$

## Trinomio Cuadrado Perfecto

Recordamos que el resultado de elevar un binomio al cuadrado es un trinomio:

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$, donde un término es el cuadrado de x; otro, es el cuadrado de a y en otro aparece el doble del producto entre x y a.

A este trinomio se lo llama *trinomio cuadrado perfecto,* porque proviene del cuadrado de un binomio.
Analicemos los siguientes ejemplos:

$$C(x) = x^2 + 10x + 25$$

$$(\mathbf{x})^2 \qquad 2\,.\,\mathbf{x}.\,\mathbf{5} \qquad (\mathbf{5})^2 \qquad \Rightarrow \quad C(x) = (\mathbf{x} + \mathbf{5})^2$$

$$G(x) = 9x^2 - 6x + 1$$

$$(3x)^2 \qquad -2\,.\,3x\,.\,1 \qquad (1)^2 \qquad \Rightarrow \quad G(x) = (3x - 1)^2 \;\text{ o }\; G(x) = (-3x + 1)^2$$

$$L(x) = \frac{1}{25}x^6 - 4x^3 + 100$$

$$\left(\frac{1}{5}x^3\right)^2 \qquad -2.\frac{1}{5}x^3.10 \qquad (10)^2 \qquad \Rightarrow \quad L(x) = \left(\frac{1}{5}x^3 - 10\right)^2$$

## Cuatrinomio Cubo Perfecto

Ya hemos visto que $(x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$ (★)

Entonces al polinomio $M(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ lo comparamos con (★)

$$(x)^3 \qquad 3.(x)^2.2 \qquad 3.x.(2)^2 \qquad (2)^3 \qquad \Rightarrow \quad M(x) = (x + 2)^3$$

Actividad N°13

Factoree los siguientes polinomios:

a) $P(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$

b) $P(x) = x^9 - 3x^6 + 3x^3 - 1$

c) $P(x) = x^4 + 2x^3 + x^2$

d) $P(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

## Binomios de la forma $x^n \pm a^n$ y otros polinomios

Si las potencias de estos términos no son pares, ¿cómo descomponer estos binomios en factores primos?
Recordaremos el concepto de valor numérico de un polinomio. Por ejemplo,
si $P(x) = x^3 - 8$ $\quad P(1) = 1^3 - 8 = -7$; $P(2) = 2^3 - 8 = 0$
si $T(x) = x^3 + 1$ $\quad T(1) = 1^3 + 1 = 2$; $T(-1) = (-1)^3 + 1 = 0$

Observamos que algunos valores numéricos son iguales a cero. Entonces decimos que:
2 es raíz de $P(x)$
$-1$ es raíz de $T(x)$

| |
|---|
| ***a es raíz de P(x) si y sólo si P(x) es divisible por (x − a)*** |

Esta propiedad es aplicable a cualquier polinomio.
Si $S(x) = x^4 - 3x + 2$, $\quad S(1) = 1^4 - 3 \,.\, 1 + 2 = 0$. Entonces, 1 es raíz de $S(x)$

Utilizando esta propiedad, podemos descomponer los tres polinomios dados:

Si 2 es raíz de $P(x) = x^3 - 8$, entonces $x^3 - 8$ es divisible por $x - 2$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -8 \\ 2 & & 2 & 4 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 0 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad x^3 - 8 = (x^2 + 2x + 4)\,(x - 2)$$

Si $-1$ es raíz de $T(x) = x^3 + 1$, entonces $x^3 + 1$ es divisible por $x + 1$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad x^3 + 1 = (x^2 - x + 1)\,(x + 1)$$

Si 1 es raíz de $S(x) = x^4 - 3x + 2$, entonces $x^4 - 3x + 2$ es divisible por $x - 1$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad x^4 - 3x + 2 = (x^3 + x^2 + x + 2)\,(x - 1)$$

Para hallar las raíces racionales de un polinomio, es conveniente conocer el Teorema de Gauss:

| |
|---|
| *Cuando una fracción irreducible $\frac{p}{q}$ es raíz de un polinomio con coeficientes enteros, p es divisor del término independiente y q es divisor del coeficiente principal.* |

Si queremos encontrar las raíces *racionales* de un polinomio con coeficientes *enteros*, debemos seguir estos pasos:

I. Hallar los divisores de término independiente (p) y los divisores del coeficiente principal (q).

II. Formar con ellos todas las fracciones irreducibles $\frac{p}{q}$, que son las posibles raíces.

III. Hallar el valor numérico del polinomio para esas fracciones para ver si alguna es raíz de él.

Ejemplifiquemos, factorizando al polinomio: P(x) = $x^4 - 4x^3 + x^2 + 8x - 6$.

Verificamos que el polinomio tiene coeficientes enteros.

I. Divisores del término independiente, (p): {1, –1, 2, –2, 3, -3, 6, –6}

Divisores del coeficiente principal, (q): {1, –1}

II. Para hallar todas las fracciones irreducibles p/q, notamos que los posibles valores de q son 1 y –1, por lo tanto p/q será igual a p, para cada caso. Es decir que las posibles raíces racionales de P son los valores de p, o sea, los divisores del término independiente.

III. Y ahora, con un poco de suerte e intuición para que la tarea sea más breve, hallamos el valor numérico de P para distintos valores de p, hasta encontrar alguna raíz:

$P(1) = 1^4 - 4 \cdot 1^3 + 1^2 + 8 \cdot 1 - 6 = 0 \Rightarrow$ 0 es raíz de P

Entonces, P(x) es divisible por x – 1

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | –4 | 1 | 8 | –6 |
| 1 | | 1 | –3 | –2 | 6 |
| | 1 | –3 | –2 | 6 | 0 |

El polinomio P queda, en principio, factorizado como: $P(x) = \left(x^3 - 3x^2 - 2x + 6\right)(x - 1)$

Busquemos ahora las raíces de Q(x) = $x^3 - 3x^2 - 2x + 6$ .

Observamos que las posibles raíces racionales de Q son las mismas que las de P.

Evaluamos $Q(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 6 = 2 \neq 0$ por lo que 1 no es raíz de Q.

Calculamos $Q(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 6 = 4 \neq 0$

Ahora $Q(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 6 = -2 \neq 0$.

Puede ser $Q(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 6 = -12 \neq 0$. ¿Vieron qué queríamos decir con esto de tener “suerte”?

Seguimos: $Q(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 + 6 = 0$. ¡Al fin! Entonces Q es divisible por x – 3. También P es divisible por x – 2 porque si 3 es raíz de Q también es raíz de P.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | –3 | –2 | 6 |
| 3 | | 3 | 0 | –6 |
| | 1 | 0 | –2 | 0 |

El polinomio P queda expresado así: $P(x) = \underbrace{(x^2 - 2)(x - 3)}_{Q(x)}(x - 1)$

Nos queda hallar las raíces de H(x) = $x^2 - 2$. Son $x = \sqrt{2}$ y $x = -\sqrt{2}$, que no pertenecen al conjunto de los racionales, pero pueden encontrarse aplicando la técnica de la diferencia de cuadrados.

Entonces P queda completamente factorizado: $P(x) = (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x-3)(x-1)$, donde las raíces reales de P(x) resultan ser $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$, $x = 3$ y $x = 1$.

A veces tenemos polinomios cuyos coeficientes no son enteros y, sin embargo, también podemos buscar sus raíces racionales aplicando el Teorema de Gauss.

Por ejemplo, $P(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$. Si al polinomio P lo multiplicamos por 2 obtenemos el polinomio F(x) = $2x^3 - 5x^2 + x + 2$. Verifiquen que las raíces racionales de F(x) son las mismas que las de P(x), a pesar de que los polinomios son diferentes.

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

<u>Actividad Nº14</u>

Factorice los siguientes polinomios, utilizando cualquiera de las técnicas descriptas, e indique cuáles son sus raíces:

a) $P(x) = x^4 - x$

b) Q(x) = $5x^3 - 10x^2 + 5x - 10$

c) T(x) = $-2x^2 + 162$

d) V(x) = $x^4 + 12x^2 + 36$

e) $W(x) = 2x^7 + 3x^6 - 5x^5$

f) $Y(x) = x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12$

# EJERCICIOS DE POLINOMIOS

1) Hallar el valor de *a* para que el resultado sea un polinomio de grado 4:

$$(3x^4 - 8ax^5 + 4x^3) - (2x^5 - ax^3) - (2x^2 + ax^5 - 7x^4)$$

2) Efectuar las siguientes operaciones:

a) $\left(\frac{3}{5}x^6 - \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}x^2\right) - (3 - 2x + x^2) =$

b) $(x - x^2) + \left(x - x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{4}{3}x^4\right)(1 - x^2) =$

c) $(1 + x^2) - (1 + x^2)\,(1 + x)\,(1 - x^2) =$

3) Calcular:

a) $(2x^3 - 3x)^2 =$

b) $\left(-z^3 - \frac{3}{4}z^2\right)^2 =$

c) $(3x^3 + 8x^2 - 7x + 6) : (2x + 1) =$

d) $(-x + 4x^3 - 2x^6 - x^4) : (x^3 + 1 + x) =$

4) Hallar el dividendo P(x) de una división entera sabiendo que el resto es $R(x) = 3x^2 + x$, el cociente $C(x) = x^3$ y el divisor es $D(x) = x^4 \cdot R(x)$.

5) Hallar el valor de *a* para que se cumpla la siguiente igualdad:

$$x^7 - 2x^5 = (x^3 + x)\left[(a-2)x^5 + x^4 - 3x^2 + 3\right] + R(x)$$

6) Para cada par de polinomios, indique si P(x) es divisible por Q(x):

a) $P(x) = -2x^4 - 5x^3 - 9x$ $\quad Q(x) = x^2 + 3x$

b) $P(x) = -2x^4 - 5x^3 - 9x$ $\quad Q(x) = -2x^2 + x - 3$

c) $P(x) = 2x^5 - 1 + x - 3x^3 + x^2$ $\quad Q(x) = x^2 - 1$

d) $P(x) = 2x^5 - 1 + x - 3x^3 + x^2$ $\quad Q(x) = x - 1$

e) $P(x) = 6x^2 - 2x + 2x^5 + x^3$ $\quad Q(x) = x - 3$

7) Al dividir $P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x + a$ por $Q(x) = x - 3$, se obtuvo 10 como resto. Hallar el término independiente de P(x).

8) El polinomio $H(x) = 3x + 14 - 2x^2$ es divisible por $Ñ(x) = x - a$. Hallar los valores de *a* para que eso sea posible.

9) Encontrar el valor de h sabiendo que $-4$ es raíz de $M(x) = 5x^6 - 7x^5 + 11x + h$

10) Encontrar el valor de h sabiendo que $-1$ es raíz de $J(x) = x^7 - 10x^4 - hx^3 + 1 - 3x$

11) Factorizar:

a) $(x-2)^2 - (x-1)^2$ $\quad$ b) $x^3 - x^2 - x + 1$ $\quad$ c) $x^4 - 1 - 9x + 9x^3$ $\quad$ d) $4x + 5 - x^3 + 4x^2$